

# Взаимодействие между стримерами и стационарные гофрированные волны ионизации в полупроводниках

А. С. Кюреган

Всероссийский Электротехнический институт им. В. И. Ленина, 111250, Москва, Россия

E-mail: ask@vei.ru

## Аннотация

Проведено численное моделирование эволюции массива идентичных взаимодействующих между собой стримеров в полупроводниках. Использовалось диффузионно-дрейфовое приближение с учетом ударной и туннельной ионизации. Предполагалось, что внешнее электрическое поле  $E_0$  постоянно и однородно, фоновые электроны и дырки отсутствуют, затравочные лавины одновременно стартуют их узлов перпендикулярной полю плоской гексагональной решетки, но сами лавины и порожденные ими стримеры обладают приближенной аксиальной симметрией. Показано, что при определенных условиях взаимодействие между стримерами приводит в конце концов к формированию двух типов стационарных волн ионизации с гофрированным фронтом или стационарной плоской волны ионизации. Построена диаграмма различных установившихся состояний таких волн в плоскости параметров  $(1/E_0, R)$  и дано качественное объяснение разбиения этой плоскости на четыре различные области. Подробно изучены и обсуждены характеристики гофрированных волн в области больших значений  $R$  и  $E_0$ , где максимальная напряженность поля на фронте достаточно велика для эффективной туннельной ионизации. Показано, что гофрированные волны ионизуют полупроводник значительно эффективнее плоских, особенно в относительно слабых внешних полях.

## 1 Введение

Стримерный механизм электрического разряда уже давно используется для описания импульсного пробоя различных сред. Теоретическому и экспериментальному изучению стримеров посвящено множество работ, однако между этими двумя способами исследования имеется существенное расхождение. В подавляющем числе теоретических работ, выполненных как аналитическими, так и численными методами, изучались одиночные стримеры. Между тем на практике разряд обычно осуществляется большим количеством близких и поэтому взаимодействующих между собой стримеров. Такое взаимодействие должно быть существенным, в частности, в импульсной короне и в стримерной зоне длинной искры, где характерное расстояние между стримерами меньше их длины, но больше их диаметра [1, 2]. Превосходные фотографии, особенно наглядно иллюстрирующие это обстоятельство, были получены за последние несколько лет (см., например, [3, 4]). Моделирование подобных мультистримерных разрядов представляет собой очень сложную трехмерную задачу, поэтому в качестве первого шага на пути ее решения

целесообразно изучать предельно упрощенную ситуацию - эволюцию массива идентичных стримеров, одновременно стартующих их узлов одномерной (в этом случае модель соответствует экспериментам [5, 6]) или двумерной периодической решетки.

Насколько нам известно, первая попытка такого рода была предпринята в работе [7], автор которой изучал эволюцию одномерного периодического массива цилиндрических стримеров, распространяющихся в воздухе от тонкого провода к параллельной ему проводящей плоскости. Взаимодействие между заряженными стримерами учитывалось путем приближенного аналитического решения соответствующей электростатической задачи и введения полученных таким образом поправок к напряженности продольного поля в численную модель одиночного стримера. Было показано, что напряженность поля перед фронтом каждого стримера в массиве и скорость их распространения заметно уменьшаются по сравнению с одиночным стримером. Однако кроме этого вполне ожидаемого результата никакой дополнительной информации автору [7] получить не удалось, поскольку он использовал так называемую 1.5D-модель, в рамках которой поперечные размеры и

форма каждого стримера априори заданы и поэтому не подвержены межстримерному взаимодействию.

Этого недостатка лишена работа [8], авторы которой моделировали эволюцию периодического массива двумерных аноднонаправленных стримеров в газах в однородном внешнем поле  $E_0$ , используя «минимальную» модель (учитывается дрейф, диффузия и ударная ионизация электронами, фоновые электроны отсутствуют, дополнительные механизмы ионизации среды не учитываются [9]). На начальном этапе стримеры развиваются независимо друг от друга так, что их длина и радиус кривизны фронта увеличиваются с постоянными скоростями [10, 11]. Однако характер дальнейшей эволюции существенно зависит от расстояния  $2L$  между осями стримеров. Если  $L$  больше некоторого критического значения  $L_c(E_0)$ , то фронт каждого стримера начинает быстро искажаться вследствие развития поперечной неустойчивости, описанной в [12–15] для газов и в [11, 16] для полупроводников. Однако при  $L < L_c(E_0)$  эта неустойчивость подавляется и со временем распространение массива стримеров становится устойчивым и автомоделным: все они движутся с постоянной скоростью  $u_f$  при неизменной форме фронта, которая не зависит от начальных условий и может быть описана многозначной функцией

$$y_f(x) = \frac{2}{\pi} bL \arccos \left[ \exp \left( \frac{\pi}{2} \frac{x - x_f}{aL} \right) \right], \quad (1)$$

где  $x_f = u_f t$  - положение фронта на оси  $x$ , параллельной внешнему полю. Эта формула была получена в работе [17] для описания формы движущейся в установившемся режиме границы раздела между двумя несжимаемыми жидкостями с сильно различающимися вязкостями (например, водой, которая выдавливает глицерин) в узкой щели между двумя пластинами с шириной  $2L$  (ячейке Хеле-Шоу) [18, 19]. В этом случае скорость  $u_f$  движения границы в  $(1+a/b)$  раз превосходит скорость  $u_0$  течения более вязкой жидкости далеко перед границей и поэтому из закона сохранения вещества следует соотношение

$$a + b = 1. \quad (2)$$

Формула (1) применима также для описания ряда других физически различных, но математически эквивалентных процессов при условии, что нормальная скорость границы раздела  $u_n$  в каждой точке пропорциональна градиенту некоторой потенциальной функции  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа, а сама граница раздела эквипотенциальна:

$$\varphi(x, y_f) = \text{const}, \quad u_n \propto E_n \equiv |\nabla_n \varphi(x, y_f)|. \quad (3)$$

В экспериментах с ячейками Хеле-Шоу всегда получается  $b = 1/2$ , то есть после установления стационарного движения границы раздела менее вязкая жидкость занимает ровно половину ширины ячейки. Этот нетривиальный феномен селекции был объяснен влиянием сколь угодно малого, но конечного отклонения от первого из условий (2) из-за поверхностного натяжения [18, 19] или кинетического переохлаждения [20].

Модель стримеров, удовлетворяющая условиям (3) (в этом случае  $\varphi$  - электрический потенциал), впервые использовалась в работе [21] (см. также монографию [22]), однако на самом деле они могут выполняться лишь весьма приближенно. Нарушение первого из них обусловлено конечной проводимостью плазмы за фронтом и заметной толщиной  $\delta$  самого фронта, а второго - более сложной зависимостью  $u_n$  от нормальной к фронту напряженности поля  $E_n$ . В рамках «минимальной» модели стримеров в газах с некоторыми оговорками можно использовать формулу [9, 23]

$$u_n = u^* \equiv v_e + 2D_e \lambda^*, \quad (4)$$

где  $\lambda^* = \sqrt{v_e \alpha_e / D_e}$  - показатель экспоненциального затухания концентрации  $n$  электронов перед фронтом, а  $v_e$ ,  $D_e$  и  $\alpha_e$  - дрейфовая скорость, коэффициент диффузии и коэффициент ударной ионизации, локально зависящие от  $E_n$ . Обычно в газах второе слагаемое в правой части (4) относительно мало [9, 23], поэтому при постоянной подвижности электронов  $\mu_e$  скорость фронта  $u_n \approx \mu_e E_n$ . Это обстоятельство авторы работы [8] считали достаточным основанием применения формулы (1) для интерпретации своих результатов численного моделирования, в частности, наблюдавшегося приближенного соотношения<sup>1</sup>  $E_M \equiv E_n(x_f, 0) = 2E_0$ ; при этом, правда, игнорировалось то, что в случае стримеров для выполнения равенства (2) нет никаких оснований.

Исследование аналогичной проблемы применительно к полупроводникам также весьма актуально. В практическом плане это обусловлено тем, что мультистримерный механизм пробоя, возможно [24, 25], определяет работу уникальных по своим характеристикам коммутаторов - лавинных обострителей напряжения [26, 27], а в научном - особенностями микроскопических процессов в полупроводниках. Среди них особенно важными являются

- насыщение зависимостей  $v_{e,h}(E)$  в относительно очень слабых полях  $E \gtrsim E_s \sim 10$  кВ/см, приводящее, в частности, к существенному (по сравнению с газами) увеличению отношения  $u_n/v_{e,h}$  даже в рамках «минимальной» модели стримера [28, 29] и

<sup>1</sup>Оно неплохо выполнялось для изучавшегося в [8] массива стримеров при наибольших значениях  $L < L_c$ , когда  $\delta \ll L$  и отклонение от первого из условий (2) минимально.

- существование туннельной ионизации, которая может увеличить отношение  $u_n/v_{e,h}$  еще на порядки величин [11, 30–35].

Эти особенности приводят к тому, что  $u_n \propto E_n$  только при  $E_n < E_s$ , а в актуальном диапазоне значений  $E_n$  функция  $u_n(E_n)$  изменяется от постоянной до экспоненциально сильной. Поэтому второе из условий (3) никогда не выполняется, а равенство (2) может быть выполнено лишь случайно при некоторых соотношениях между параметрами задачи. Столь радикальное изменение классической постановки задачи [18, 19] может привести к существенно иным сценариям эволюции границы раздела между фазами в сильно неравновесных условиях.

В настоящей работе мы попытались изучить эту интересную проблему путем численного моделирования процесса взаимодействия между стримерами в полупроводниках. Главной целью являлось получение максимально подробных и полных результатов для простейшего случая постоянного и однородного внешнего поля, которые могли бы служить основой для дальнейших исследований.

## 2 Математическая модель массива стримеров

Как и авторы большинства работ, посвященных численному моделированию стримеров, мы использовали диффузионно-дрейфовое приближение, в рамках которого распределения электронов  $n(t, \mathbf{r})$ , дырок  $p(t, \mathbf{r})$  описываются системой уравнений непрерывности, которые нам удобно записать в виде

$$\frac{\partial(p+n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_h + \mathbf{j}_e) = 2(s_g + s_r), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(p-n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_h - \mathbf{j}_e) = 0. \quad (6)$$

где слагаемые  $s_{g,r}$  описывают все возможные механизмы генерации и рекомбинации, плотности потоков свободных носителей заряда равны

$$\mathbf{j}_{e,h} = \mathbf{v}_{e,h}n - \nabla(D_{e,h}n),$$

индексы «e» и «h» соответствуют электронам и дыркам. В настоящей работе мы ограничились рассмотрением только непрямозонных полупроводников типа Si, Ge или SiC, в которых скорость излучательной рекомбинации очень мала. Поэтому фотоионизацией среды перед фронтом стримера излучением плазмы из-за фронта можно пренебречь и считать, что генерация пар происходит главным образом за счет ударной и туннельной ионизации. В этом случае

$$s_g = (\alpha_e v_e n + \alpha_h v_h p)h(n + p - n_{th}) + g_t,$$

где  $h(x)$  - единичная функция Хэвисайда,  $n_{th}$  - некоторая пороговая концентрация. Она введена для того, чтобы исключить появление нефизических решений из-за ударной ионизации далеко перед фронтом стримера, где концентрация электронов и дырок, порожденных туннельной ионизацией во внешнем поле, очень мала ( $n + p < n_{th}$ ) и континуальное приближение заведомо неприменимо [30, 36]. Так как время жизни носителей заряда обычно много больше времени распространения стримеров, мы пренебрегали рекомбинацией, то есть полагали  $s_r = 0$ . Кроме этого мы считали, что коэффициенты ударной ионизации  $\alpha_{e,h}$ , скорость туннельной ионизации  $g_t$  и дрейфовые скорости  $\mathbf{v}_{e,h}$  являются заданными мгновенными и локальными функциями напряженности поля  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ , удовлетворяющей уравнению Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon}(p - n) = -\Delta\varphi, \quad (7)$$

где  $\varphi$  - электрический потенциал,  $q$  - элементарный заряд,  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды, использовали обычные аппроксимации

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h &= -\mathbf{v}_e = \mu \mathbf{E}, \quad \mu = v_s/(E + E_s), \\ \alpha_e &= \alpha_h = \tilde{\alpha} \exp(-\tilde{E}/E), \\ g_t &= \tilde{g}_t (E/E_t)^2 \exp(-E_t/E), \end{aligned}$$

и пренебрегали зависимостью коэффициентов диффузии  $D_{e,h}$  от  $E$ , полагая  $D_e = D_h = D = const$ . Входящие в (8)-(10) подгоночные параметры  $v_s, E_s, \tilde{\alpha}, \tilde{E}, \tilde{g}$  и  $E_t$  определяются зонной структурой полупроводника и механизмами рассеяния электронов и дырок. Мы использовали те же типичные значения  $v_s = 10^7$  см/с,  $E_s = 150$  кВ/см,  $\tilde{\alpha} = 10^6$  см<sup>-1</sup>,  $\tilde{E} = 1,5$  МВ/см,  $\tilde{g} = 6,7 \cdot 10^{35}$  см<sup>-3</sup>с<sup>-1</sup>,  $E_t = 22,5$  МВ/см,  $D = 20$  см<sup>2</sup>с<sup>-1</sup> и  $\varepsilon = 11,8\varepsilon_0$ , что и в работе [11].

Начальные условия для системы уравнений (5)-(7) имеют вид

$$\varphi(0, \mathbf{r}) = -E_0 x, \quad (8)$$

$$\sigma(0, \mathbf{r}) = \sigma_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \rho(0, \mathbf{r}) = 0, \quad (9)$$

где  $E_0$  - напряженность внешнего поля, направленного вдоль оси  $x$ ,  $\sigma = q(p+n)/\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{E}$ ,  $\rho = q(p-n)/\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{E}$  - безразмерные концентрация и плотность объемного заряда электронов и дырок,  $\sigma_0(\mathbf{r})$  - любая достаточно сильно локализованная функция, удовлетворяющая условию нормировки  $\int \sigma_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 2q/\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{E}$ . Мы использовали гауссово распределение

$$\sigma_0(\mathbf{r}) = \sigma_0^0 \exp(-r^2/r_\sigma^2)$$

где  $\sigma_0^0 = 2q/\pi^{3/2}\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{E}r_\sigma^3 \approx 0,0045$ .

Условия (9) соответствуют появлению в каждой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  одной электронно-дырочной пары в момент времени  $t = 0$ . В соответствии со сказанным во Введении, эти точки совпадают с узлами плоской, например, гексагональной решетки, расположенной в плоскости  $x = 0$ . В этом случае лавины и порождаемые ими стримеры обладают симметрией правильной шестигранной призмы. Поэтому в цилиндрической системе координат  $\mathbf{r} = \{x, y, \vartheta\}$  (здесь и далее  $y$  - расстояние от точки  $\mathbf{r}$  до оси  $x$ ), строго говоря, следует учитывать зависимости  $n, p$  и  $\varphi$  от азимутального угла  $\vartheta$ , то есть необходимо решать трехмерную задачу Коши с естественными граничными условиями на боковых гранях призмы, требующую очень больших вычислительных ресурсов. Между тем проблему можно радикально упростить, если аппроксимировать призму с шириной боковых граней  $H$  цилиндром с радиусом  $R = H\sqrt{3\sqrt{3}/2\pi} \approx 0.91H$ . При этом площади оснований призмы и цилиндра совпадают, а расстояние между их боковыми поверхностями не превосходит  $0.1H$ . Столь малое различие форм боковых поверхностей не должно оказать заметное влияние на процессы ионизации и переноса вблизи оси симметрии, которые в основном и определяют эволюцию массива стримеров. Для подтверждения справедливости этого утверждения в Таблице приведены основные параметры (максимальное поле на фронте  $E_M$ , концентрация электронов и дырок на оси  $x$  за фронтом  $\sigma^-$  и скорость фронта  $u_f$ ) плоского, аксиально симметричного и гексагонального стримеров, полученные при моделировании с одинаковыми сетками конечных элементов. Как видно, параметры плоского стримера существенно отличаются от практически совпадающих параметров аксиально симметричного и гексагонального стримеров. В то же время безразмерная скорость счета  $\Delta x_f / \Delta t v_s$  (здесь  $\Delta t$  - время, затраченное на моделирование процесса продвижения фронта на расстояние  $\Delta x_f$ ) гексагонального стримера почти в 100 раз меньше, чем аксиально симметричного. Поэтому в настоящей работе мы будем пренебрегать зависимостями  $n, p, \varphi(\vartheta)$ , слабыми при актуальных значениях  $y \lesssim H/2 \approx R/2$ , и считать, что лавины и стримеры обладают аксиальной симметрией.

#### Параметры различных стримеров при

$$E_0 = 0.5\tilde{E}, L = R = 0.91H, H = 289/\tilde{\alpha}$$

Параметр	Плоский	Аксиальный	Гексагональный
$E_M/\tilde{E}$	0.773	1.17	1.18
$\sigma^-$	0.17	0.58	0.59
$u_f/v_s$	1.88	4.14	4.12
$\Delta x_f/\Delta t v_s$	0.36	0.15	0.0017

При сделанных допущениях наша задача также сим-

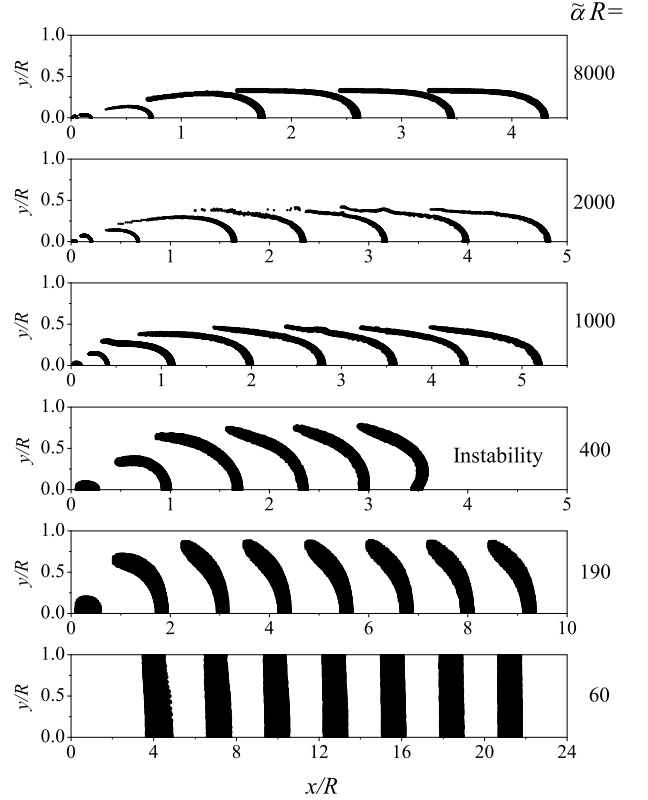


Рис. 1: Эволюция фронта массива стримеров при  $E_0 = 0.36\tilde{E}$  и разных  $R$ . Черным цветом отмечены области фронта, внутри которых плотность объемного заряда больше  $0.002\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{E} \approx 3,2$  мКл/см<sup>3</sup>, в моменты времени  $t = i/\tilde{\alpha}v_s \approx 10i$  пс,  $i = 1, 2, \dots, 8$ .

метрична относительно плоскости  $x = 0$ , поэтому ее достаточно решить в прямоугольной области

$$0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq R,$$

длина которой  $X$  должна быть значительно больше длины стримера. При этом граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0, y) &= 0, \quad \partial\varphi(t, x, y)/\partial x|_{x=X} = E_0, \\ \partial\phi(t, x, y)/\partial y|_{y=0, R} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma(t, X, y) = 0, \quad \partial\sigma(t, x, y)/\partial x|_{x=0} = \partial\sigma(t, x, y)/\partial y|_{y=0, R} = 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho(t, X, y) &= \rho(t, 0, y) = 0 \\ \partial\rho(t, x, y)/\partial y|_{y=0, R} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Задача Коши (5)-(12) решалась методом конечных элементов с адаптивной неоднородной сеткой так, как описано в работе [11].

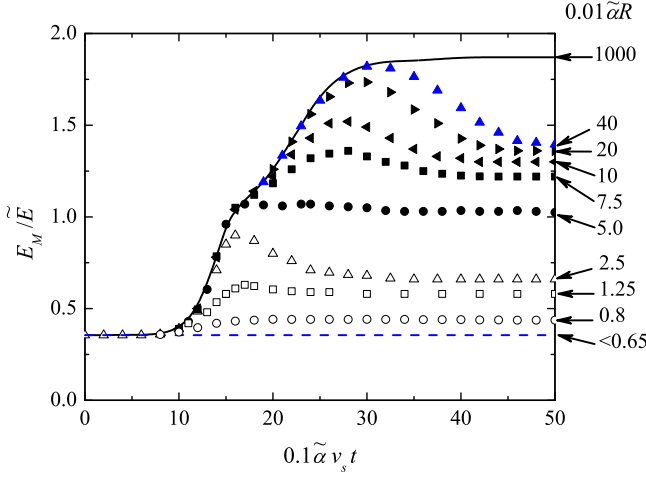


Рис. 2: Зависимости максимальной напряженности поля  $E_M$  в массиве стримеров от времени при  $E_0 = 0.36\tilde{E}$  и различных значениях  $R$ : светлые символы - расчет при  $R_0 < R < R_c$ , темные символы - расчет при  $R > R_t$ . Сплошная линия - зависимость  $E_M(t)$  для изолированного стримера, штриховая линия - напряженность внешнего поля  $E_0$ .

### 3 Результаты моделирования и их обсуждение

Расчеты выполнялись для значений  $E_0 = (0.2 - 0.7)\tilde{E}$  и  $R = (20 - 8000)\tilde{\alpha}^{-1}$  при  $r_\sigma = 2/\tilde{\alpha}$  и  $\sigma_{th} = 10^{-8}$ . Результаты моделирования представлены на Рисунках 1-13.

Как и следовало ожидать, лавины и стримеры развиваются независимо друг от друга так, как описано в [11], пока их длина  $2x_f \ll 2R$ . При  $x_f = (2.5 \div 3)R$  электростатическое взаимодействие между ними становится заметным (см. Приложение). Вначале это приводит к замедлению расширения стримеров (Рис. 1) и к уменьшению максимальной напряженности поля  $E_M$  на фронте (Рис. 2). Дальнейшие результаты взаимодействия существенно зависят от значений свободных параметров задачи  $E_0$  и  $R$ . Оказалось, что плоскость  $[1/E_0, R]$  распадается на четыре области, изображенные на Рис. 3, внутри которых характер эволюции массива стримеров качественно различается.

В областях 1 и 2 (то есть при  $R > R_t(E_0)$  и при  $R_0(E_0) < R < R_c(E_0)$ ) с течением времени расширение стримеров прекращается, их форма и параметры ( $E_M$ ,  $\sigma^-$ ,  $u_f$ ) перестают изменяться, то есть весь массив стримеров превращается в стационарную волну ионизации с более или менее сильно искривленным (гофрированным) фронтом (см. Рис. 1). Общей для этих областей является тенденция к уменьшению вместе с  $R$  установившихся значений параметров  $E_M$ ,  $\sigma^-$ ,  $u_f$  и

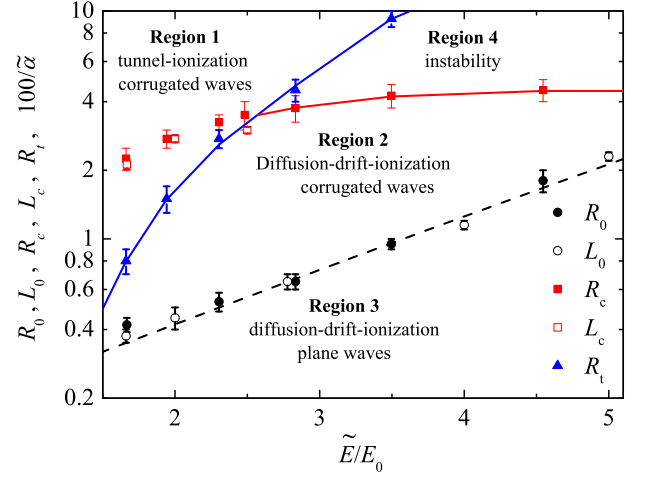


Рис. 3: Диаграмма установившихся состояний гексагональной решетки стримеров. Линии разделяют плоскость  $(1/E_0, R)$  на четыре качественно различных области (см. текст). Символы - результаты численного моделирования (темные квадраты при  $E_0 > 0.4\tilde{E}$  - расчет без учета туннельной ионизации, светлые кружки - расчет для решетки плоских стримеров с периодом  $L$ , светлые квадраты - расчет для газов по данным [8]), штриховая линия - расчет по формулам (25),(26).

кривизны фронта (см. Рис. 4).

Для описания таких волн удобно использовать движущуюся вместе с фронтом систему безразмерных координат  $\hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} - u_f x)/R$  и искать решение в виде

$$\begin{vmatrix} \sigma(t, \mathbf{r}) \\ \rho(t, \mathbf{r}) \\ \varphi(t, \mathbf{r}) \\ \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\sigma}(\hat{\mathbf{r}}) \\ (\tilde{\alpha}R)^{-1}\hat{\rho}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \tilde{E}R\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \tilde{E}\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (5)-(7) приводит к системе уравнений

$$\frac{u_f}{R} \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \hat{x}} + 2(\hat{\sigma}v\alpha + \frac{qg_t}{\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{E}}) = \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{\tilde{\alpha}} \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho}\mathbf{v}) - D\hat{\Delta}\hat{\sigma} \right], \quad (14)$$

$$\frac{u_f}{R} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{x}} - \hat{\nabla} \cdot (\hat{\sigma}\mathbf{v}) = -\frac{D}{\tilde{\alpha}R^3} \hat{\Delta}\hat{\rho}, \quad (15)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \mathbf{F} = \hat{\rho} = -\hat{\Delta}\hat{\varphi}, \quad (16)$$

где в операторах  $\hat{\nabla}$  и  $\hat{\Delta}$  дифференцирование производится по  $\hat{\mathbf{r}}$ .

В области 1 максимальная напряженность поля на фронте  $E_M$  достигает достаточно большой величины (порядка  $\tilde{E}$  при выбранных нами значениях параметров полупроводника), чтобы стала заметной туннельная ионизация. При очень больших  $R$  форма фронта  $y_f(x)$  и параметры  $E_M$ ,  $\sigma^-$  не зависят от  $R$ , плотность

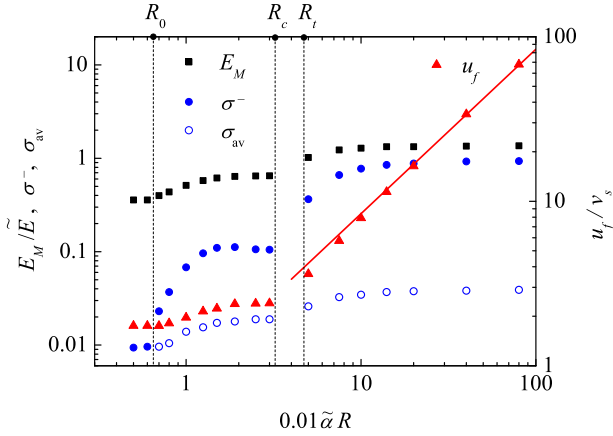


Рис. 4: Зависимости максимальной напряженности поля  $E_M$ , скорости фронта  $u_f$ , максимальной  $\sigma^-$  и средней по площади  $\sigma_{av}$  концентраций носителей заряда за фронтом от параметра  $R$  при  $E_0 = 0.36\tilde{E}$ .

объемного заряда  $qr \propto 1/R$ , а скорость  $u_f \propto R$  и намного превышает максимальную скорость дрейфа  $v_s$  (см. Рис. 4). Такие законы подобия являются прямым следствием структуры уравнений (14)-(15), правые части которых становятся пренебрежимо малыми при  $R \rightarrow \infty$ , а безразмерные функции  $\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{r}})$ ,  $\hat{\rho}(\hat{\mathbf{r}})$ ,  $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{r}})$ ,  $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})$  перестают зависеть от  $R$ , если скорость фронта  $u_f \propto R$ .

Интересно отметить, что решение вида (13) вполне аналогично экспоненциально-автомодельному решению системы уравнений непрерывности и Пуассона, описывающих эволюцию изолированного стримера в однородном поле в неограниченном пространстве [34, 37]. Разница состоит лишь в том, экспоненциально растущие пространственные масштабы и скорость фронта стримера в нашем случае становятся (по прошествии достаточного времени) постоянными. Вид автомодельных уравнений (14),(15) также несколько изменяется (по сравнению с уравнениями (11),(12) из [34]) из-за того, что ограничиваются только поперечные масштабы каждого стримера в массиве. Принципиальным является то, что оба типа автомодельности реализуются лишь при достаточно больших  $R$  и  $u_f$ , когда слагаемыми с множителями  $R^{-2}$  или  $u_f^{-2}$  можно пренебречь. Физический смысл этого приближения состоит в том, что при больших  $R$  скорость фронта  $u_f$  становится много больше средней направленной скорости носителей заряда. В этом пределе их перенос непосредственно не влияет на изменение  $\sigma$ , которое обусловлено только ионизацией в соответствии с уравнением (14). Роль дрейфа сводится к образованию объемного заряда (см. уравнение (15)), который подавляет поле за фронтом в соответствии с уравнением Пуассона (16) и определяет структуру вол-

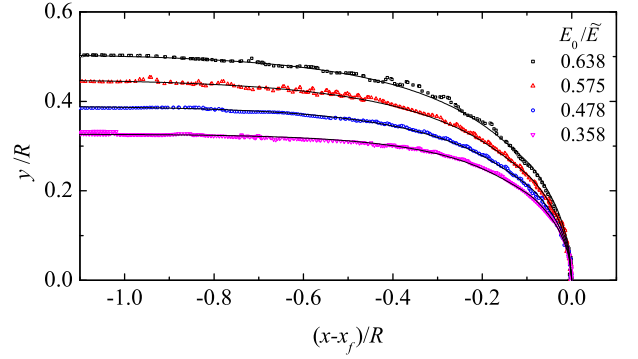


Рис. 5: Установившиеся формы фронта гексагональной решетки стримеров при  $\tilde{\alpha}R = 8000$  и различных напряженностях внешнего поля  $E_0$ . Символы указывают положения точек за фронтом, в которых напряженность поля по результатам численного моделирования равна  $0.001\tilde{E}$ , линии - аппроксимации по формуле (1).

ны в целом.

Зависимости  $y_f(x)$  для таких удаленных друг от друга стримеров, изображенные на Рис. 5, хорошо описываются функцией (1) при замене  $L$  на  $R$ , однако по причинам, указанным во Введении, ее следует рассматривать всего лишь как одну из подходящих аппроксимаций результатов моделирования. Входящие в нее подгоночные параметры  $a, b$  существенно зависят от  $E_0$  (см. Рис. 6), причем  $a \neq b$  и  $(a+b) \neq 1$ . Зависимости остальных параметров фронта от  $E_0$  изображены для этого случая на Рис. 7-9.

Как и следовало ожидать, максимальная напряженность поля на фронте  $E_M$  увеличивается с ростом  $E_0$  (Рис. 7); вместе с ней увеличиваются независимые от  $R$  безразмерное время  $u_f/\tilde{\alpha}Rv_s$  пролета фронтом расстояния  $R$  (Рис. 7) и концентрации  $\sigma^-$ ,  $\sigma_{av}$  (Рис. 8). Однако при этом отношение  $E_M/E_0$  уменьшается (см. Рис. 9). Для объяснения этого эффекта следует отметить, что по мере удаления от плоскости  $x = x_f$  скорость ионизации быстро уменьшается вместе с  $E_n$  и становится пренебрежимо малой при  $x < x_i$  и  $E_n < E_i \equiv E_n(x_i) \sim 0.1\tilde{E}$ . Ясно, что длина  $(x_f - x_i)$  области ионизации увеличивается вместе с  $E_M$  и  $E_0$ , поэтому радиус  $bR$  каждого стримера в массиве тоже должен увеличиваться. Параметр  $a$ , характеризующий «степень заостренности» фронта стримеров<sup>2</sup>, тоже увеличивается с ростом  $E_M$ , но медленнее, чем  $b$ . Иными словами это означает, что с ростом  $E_0$  стримеры должны становиться острее, но толще. Результаты численных расчетов  $E_M$  для простейшей модели стримера (см. Приложе-

<sup>2</sup> Чем больше  $a$ , тем фронт стримера острее при фиксированном значении  $bR$ .

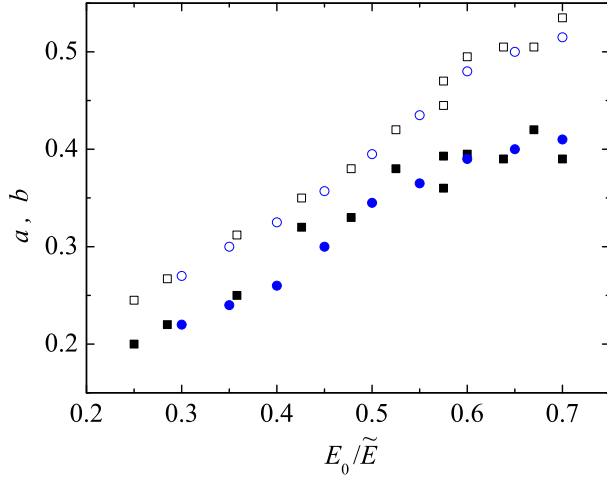


Рис. 6: Зависимости параметров  $a$  (темные символы) и  $b$  (светлые символы), определяющих установившуюся форму фронта массива стримеров (см. (1)), от напряженностях внешнего поля  $E_0$  при  $\tilde{\alpha}R = 8000$  (квадраты) и  $\tilde{\alpha}R = 4000$  (кружки).

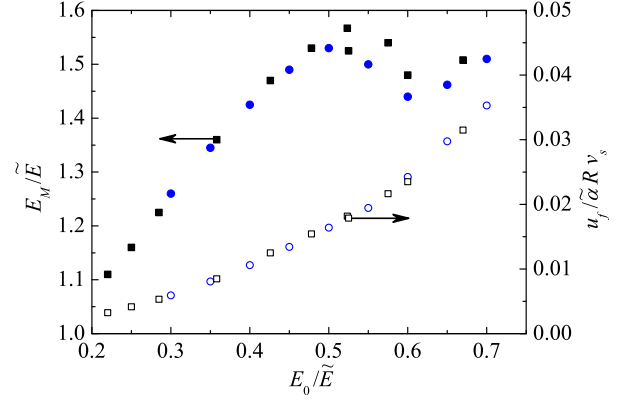


Рис. 7: Зависимости максимальной напряженности поля  $E_M$  и безразмерного времени  $u_f/\alpha\tilde{R}v_s$  пролете фронтом расстояния  $R$  от напряженности внешнего поля  $E_0$  при  $\tilde{\alpha}R = 8000$  (квадраты) и  $\tilde{\alpha}R = 4000$  (кружки).

$$\frac{dy_f}{dx} = -\frac{u_n}{\sqrt{u_f^2 - u_n^2}}, \quad (17)$$

ние) показывают, что совместное действие этих двух факторов должно приводить к падающей зависимости  $E_M/E_0$  от  $E_0$ , которая согласуется с результатами моделирования (см. Рис. 9) в качественном отношении. Некоторое превышение ожидаемых отношений  $E_M/E_0$  над наблюдаемыми объясняется тем, что фронт стримеров имеет конечную толщину  $\delta$ , причем отношение  $\delta/R$  увеличивается с ростом  $E_0$  [35]. Здесь необходимо отметить важный для практических применений результат: средняя концентрация  $\sigma_{av}$  электронов и дырок за фронтом гофрированной волны ионизации значительно больше, чем за фронтом плоской волны (Рис. 8). Причина этого состоит в том, что уменьшение площади ионизации примерно в  $b^2$  раз в гофрированной волне по сравнению с плоской с избытком компенсируется за счет экспоненциального увеличения скорости ударной ионизации. Этот эффект особенно велик в относительно слабом внешнем поле, когда зависимость  $\alpha(E)$  очень резкая.

При уменьшении  $R$  становится заметно, что фронт напоминает не столько цилиндр с овальным наконечником, сколько волан для бадминтона (Рис. 1), причем наклон почти линейного участка графика функции  $y_f(x)$  (оперения волана) уменьшается примерно обратно пропорционально  $R$  (Рис. 10) и аппроксимация (1) становится все менее пригодной. Для объяснения этого эффекта следует учесть, что в случае стационарной волны выполняется кинематическое соотношение

где<sup>3</sup>  $u_n = u_n[E_n(x)]$  и по определению  $y_f(x_f) = 0$ ,  $u_n(x_f) = u_f$ . В области  $x < x_i$  сам фронт перестает быть фронтом ионизации, а представляет собой просто тонкий слой объемного заряда, движущийся главным образом за счет дрейфа электронов (если на фронте  $\rho < 0$ ) или дырок (если на фронте  $\rho > 0$ ), поэтому  $u_n = v[E_n(x)]$ . Отсюда и из законов подобия  $u_f \propto R$ ,  $E_M = \tilde{E}F(0, 0)$  следует, что производная  $dy_f/dx$  стремится к нулю, а радиус стримеров - к некоторой постоянной величине  $bR$  при  $R \rightarrow \infty$  и  $u_f/v_s \rightarrow \infty$ . Нетрудно показать, что в этом случае напряженность поля  $E_n$  за фронтом убывает по закону

$$E_n(x) \approx E_i \exp[\lambda_E(x - x_i)], \quad (18)$$

где

$$\lambda_E \approx \frac{1}{R} \left( \frac{1.85}{1-b} - 1 \right) \quad (19)$$

- минимальный положительный корень уравнения

$$J_0(\lambda_E b R) Y_1(\lambda_E R) = J_1(\lambda_E R) Y_0(\lambda_E b R),$$

<sup>3</sup>Если на распространение волны существенное влияние оказывает туннельная ионизация, то  $u_n$  зависит не только от  $E_n$ , но и от всего распределения поля вдоль силовой линии, пересекающей фронт [34, 35]. Это обстоятельство делает аналитическое вычисление всей формы фронта совсем уж безнадежным, но не оказывает никакого влияния на свойства функции  $y_f(x)$  при  $x < x_i$ .



$J_\nu$  и  $Y_\nu$  - функции Бесселя первого и второго рода порядка  $\nu$ . Подстановка (18) в (17) приводит после интегрирования к асимптотической зависимости

$$y_f(x) = bR - \frac{v}{\lambda_E \sqrt{u_f^2 - v^2}} \ln \left[ 1 + \frac{E_i}{E_s} e^{\lambda_E(x-x_i)} \right], \quad (20)$$

которая справедлива при условии малости второго слагаемого по сравнению с первым. В полупроводниках обычно  $E_i \gg E_s$ , поэтому существует область, где  $E_s \ll E_n \leq E_i$ ,  $v \approx v_s$  и

$$y_f(x) \approx y_f(x_i) - \frac{v_s}{\sqrt{u_f^2 - v_s^2}}(x - x_i) \quad (21)$$

в соответствии результатами моделирования (см. Рис. 1, 10). Формула (21) следует также прямо из (17) и поэтому, в отличие от (20), справедлива даже если отношение  $u_f/v_s$  не очень велико<sup>4</sup>. Вследствие этого целесообразно использовать аппроксимацию

$$y_f(x) = \frac{2}{\pi} b_\infty R \arccos \left[ \exp \left( \frac{\pi}{2} \frac{x - x_f}{aR} \right) \right] - \frac{v_s}{\sqrt{u_f^2 - v_s^2}}(x - x_f), \quad (22)$$

которая согласуется с (21) при надлежащем выборе  $b_\infty$  и  $(x - x_f) > 2aR$ , совпадает с (1) при  $v_s/u_f \rightarrow 0$  и хорошо описывает форму фронта при всех отношениях  $v_s/u_f$  до тех пор, пока  $E_n > E_s$ .

При еще больших значениях  $(x_f - x)$  выполняется неравенство  $E_n \ll E_s$ , поэтому из (20) следует, что функция  $y_f(x)$  стремится  $bR$  по экспоненте

$$y_f(x) = bR - \frac{\mu_0 E_i}{\lambda_E u_f} e^{\lambda_E(x-x_i)}, \quad (23)$$

где  $\mu_0 = v_s/E_s$  - низкополевая подвижность. В газах  $E_s \gg E_i$  (то есть  $\mu = \mu_0$  в актуальном диапазоне полей), поэтому область линейности функции  $y_f(x)$  должна отсутствовать, что согласуется с результатами [8]. В плоском случае  $\lambda_E = \pi/2L(1-b)$ , так что формула (23) правильно описывает асимптотику функции (1) при  $(x_f - x) \rightarrow \infty$ , полученной в результате точного решения соответствующей задачи. Это совпадение подтверждает правильность описанного выше приближенного метода определения формы фронта при  $x < x_i$ .

Необходимо, однако, иметь в виду, что вследствие экспоненциального уменьшения напряженности поля  $E_n$  и соответствующей ему плотности поверхностного заряда фронт как таковой фактически перестает

<sup>4</sup>Интересно отметить точную аналогию между таким фронтом ионизации и ударной волной, возникающей при сверхзвуковом движении тел в газах.

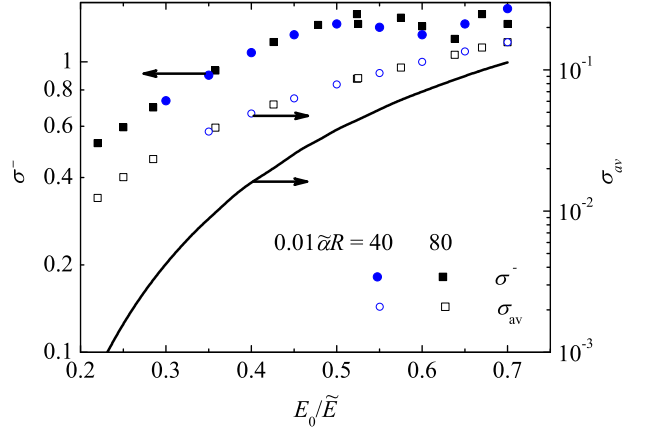


Рис. 8: Зависимости максимальной  $\sigma^-$  и усредненной по площади  $\sigma_{av}$  концентраций носителей заряда за фронтом от напряженности внешнего поля  $E_0$  при  $\tilde{\alpha}R = 8000$  (квадраты) и  $\tilde{\alpha}R = 4000$  (кружки). Линия - расчет  $\sigma^-$  для плоской волны.

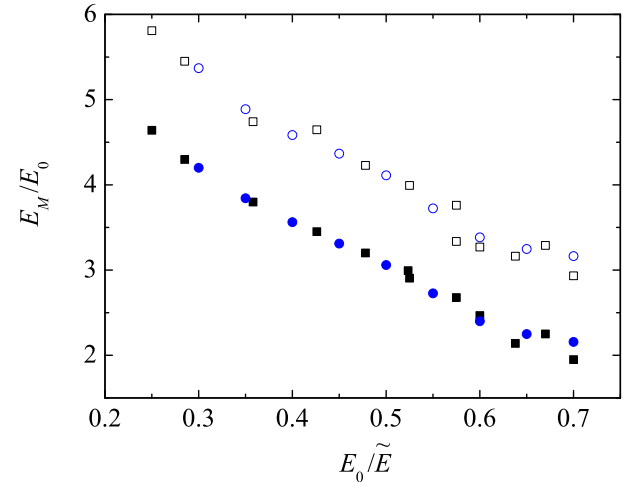


Рис. 9: Зависимости отношения  $E_M/E_0$  от напряженности внешнего поля  $E_0$  при  $\tilde{\alpha}R = 8000$  (квадраты) и  $\tilde{\alpha}R = 4000$  (кружки). Темные символы - результаты моделирования, светлые символы - расчет по формуле (A1) с использованием значений  $a$  и  $b$ , приведенных на Рис. 6.

существовать как раз там, где формально применима формула (23). Вместо него образуется шнур квазинейтральной плазмы, заполняющий всю область  $y < R$ , но сильно неоднородный в поперечном направлении. Основным механизмом переноса электронов и дырок здесь становится амбиполярная диффузия, которая приводит к расплыванию их радиального распределения, так что  $\sigma \rightarrow \sigma_{av}$  при  $x \rightarrow -\infty$  (Рис.11). Этот



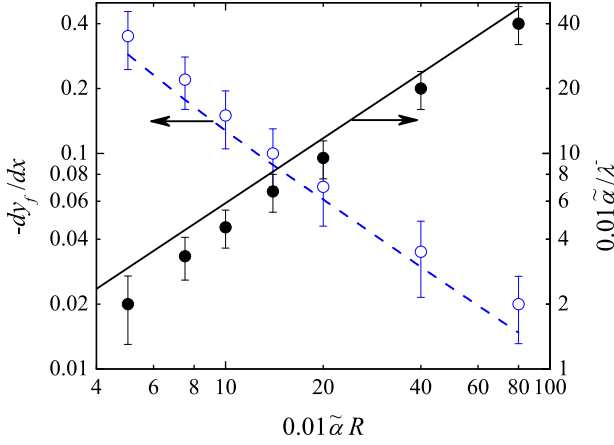


Рис. 10: Зависимость производной  $dy_f/dx$  на линейном участке функции  $y_f(x)$  (светлые символы) и длины  $1/\lambda^-$  затухания поля за фронтом (темные символы) от  $R$  при  $E_0 = 0.36\tilde{E}$ . Точки получены путем обработки результатов моделирования, штриховая линия - расчет по формуле (21) с использованием значений  $u_f$ , приведенных на Рис. 4, сплошная линия - расчет по формуле (19) с использованием значений  $b$ , приведенных на Рис. 6.

процесс прекрасно описывается формулой

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \sigma_{av} + B \exp\left(\frac{x_0 - x}{x_1}\right) J_0\left(a_{11} \frac{y}{R}\right) + \\ &+ C \exp\left(\frac{x_0 - x}{x_2}\right) J_0\left(a_{12} \frac{y}{R}\right), \quad (24) \\ B &= \frac{(\sigma_{00} - \sigma_{av})J_0(a_{12}) - \sigma_{0R} + \sigma_{av}}{J_0(a_{12}) - J_0(a_{11})}, \\ C &= \frac{(\sigma_{00} - \sigma_{av})J_0(a_{11}) - \sigma_{0R} + \sigma_{av}}{J_0(a_{11}) - J_0(a_{12})}, \end{aligned}$$

где  $x_k = u_f R^2 / Da_{1k}^2$ ,  $a_{11} \approx 3,83$  и  $a_{12} \approx 7,02$  - первый и второй корни уравнения  $J_1(x) = 0$ ,  $\sigma_{00}$  и  $\sigma_{0R}$  - концентрации в плоскости  $x = x_0 < x_i$  при  $y = 0$  и  $y = R$  соответственно, которые, как и  $\sigma_{av}$ , определяются путем обработки результатов моделирования. Она получена с использованием первых двух членов ряда формулы (8.3) из VII главы книги [39] и применима при условии  $x_1 \gg D/u_f$ , когда продольной диффузией можно пренебречь. Формула (24) также позволяет объяснить тот факт, что поперечное расплывание плазмы, практически незаметное в области 1, становится определяющим при небольших  $x_k \propto u_f R^2$ , то есть в области 2.

Кроме этого, уменьшение  $R$  приводит еще к двум эффектам. Во-первых,  $E_M$  снижается настолько, что при  $R < R_t(E_0)$  туннельная ионизация перестает оказывать заметное влияние на эволюцию массива стримеров и в относительно слабом внешнем поле (при  $E_0 < 0.4\tilde{E}$

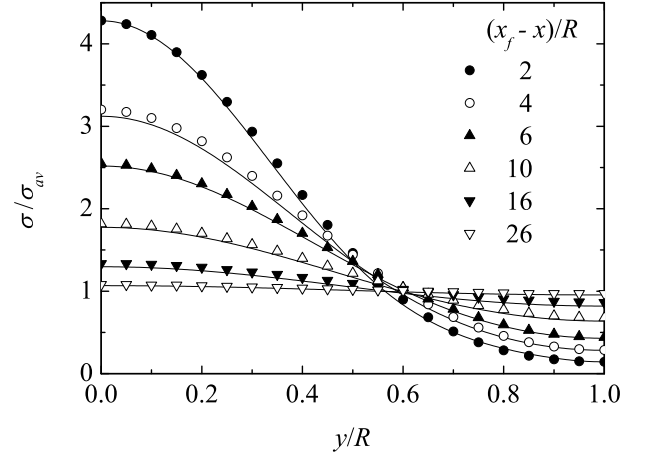


Рис. 11: Радиальные распределения концентрации  $\sigma$  носителей заряда на разных расстояниях от фронта при  $R = 100\tilde{\alpha}$  и  $E_0 = 0.36\tilde{E}$ . Линии - результаты моделирования, символы - расчет по формуле (24) при  $\sigma_{av} = 0.0138$ ,  $\sigma_{00} = 0.059$  и  $\sigma_{0R} = 0.002$ .

в нашем случае) стационарное распространение стримеров становится невозможным из-за развития поперечной неустойчивости фронта каждого из них. Во-вторых, еще большее снижение  $R$  в конце концов подавляет неустойчивость и при  $R < R_c(E_0)$  (в области 2 на Рис. 3) эволюция массива стримеров опять завершается возникновением стационарной гофрированной волны, которая теперь распространяется не только за счет дрейфа и ударной ионизацией, но и диффузии. Такой же механизм определяет эволюцию изолированных стримеров во время «диффузионной» стадии [11]. Поэтому неудивительно, что неустойчивость фронта таких стримеров наступает (по данным работы [11]), когда его радиус становится порядка  $R_c$ . Интересно отметить, что фронт массива двумерных стримеров в газах тоже становится неустойчивым [8], когда расстояние  $2L$  между ними превышает  $2R_c$  (см. Рис. 3). Границы области неустойчивости (области 4 на Рис. 3) определяются неравенствами  $R_t(E_0) > R > R_c(E_0)$ , поэтому она существует только при  $E_0 < 0.4\tilde{E}$ . В более сильных внешних полях туннельная ионизация не «выключается» и подавляет неустойчивость даже при  $R < R_c(E_0)$ .

При дальнейшем уменьшении  $R$  кривизна гофрированного фронта, а вместе с ней и параметры  $E_M$ ,  $\sigma^-$  также уменьшаются. Первичные лавины начинают перекрываться до наступления лавинно-стримерного перехода и формируют периодически возмущенный в поперечном направлении стационарно движущийся фронт ионизации причем самая длинноволновая гармоника этого возмущения задается граничными усло-

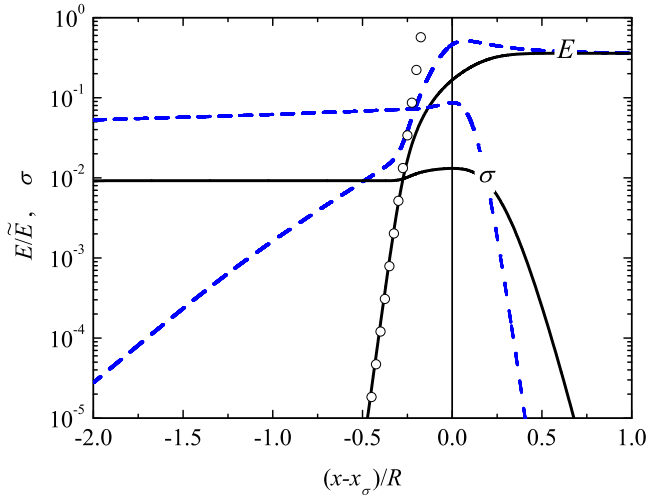


Рис. 12: Распределения напряженности поля  $E$  и концентрации  $\sigma$  носителей заряда вдоль оси  $x$  вблизи фронтов плоской (сплошные линии) и гофрированной (штриховые линии) волн при  $R = 100\tilde{\alpha}$  и  $E_0 = 0.36\tilde{E}$ . Символы - расчет по формуле (28) с использованием значений  $\sigma^-$  и  $u_f$ , полученных при моделировании плоской волны. Концентрация  $\sigma$  на оси  $x$  максимальна при  $x = x_\sigma \lesssim x_f$ .

виями нашей задачи и имеет волновое число  $k = \pi/R$ . Амплитуды возмущений (в частности, разность  $E_M - E_0$ ) монотонно уменьшаются вместе с  $R$  до тех пор, пока при  $R = R_0(E_0)$  не обращаются в ноль. При еще меньших  $R$  (в области 3) порожденные первичными лавинами возмущения затухают, так что со временем возникает плоская волна ударной ионизации. Этот результат полностью согласуется с выводами теории поперечной неустойчивости волн ударной ионизации. Для газов такая теория была создана авторами работы [15], которые показали, что возмущения с  $k < k_0 \approx \lambda^*/4$  должны нарастать со временем, а более коротковолновые - затухать. Это утверждение справедливо и для полупроводников [16] при использовании соответствующей нашему случаю формулы [28, 29]

$$\lambda^* = \alpha_0 \sqrt{\frac{v_s}{D\alpha_0} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{v_s}{D\alpha_0}}}, \quad (25)$$

где  $\alpha_0 = \alpha(E_0)$ . Сказанное означает, что при

$$R < R_0 \approx 4\pi/\lambda^* \quad (26)$$

массив лавин должен породить плоскую волну<sup>5</sup> удар-

<sup>5</sup>Аналогичный эффект наблюдался ранее при моделировании распространения пламени в трубе [38]: уменьшение ее диаметра до соответствующего этому процессу критического значения подавляло поперечную неустойчивость и фронт пламени оставался плоским.

ной ионизации в соответствии с результатами моделирования. Такая волна распространяется с одинаковой при всех  $R < R_0$  скоростью [28, 29]

$$u^* = \frac{D}{2} \left( 3 + \sqrt{1 + \frac{4v_s}{D\alpha_0}} \right) \lambda^*, \quad (27)$$

только за счет дрейфа, диффузии и ударной ионизации, так как напряженность поля на ее фронте не превосходит  $E_0$  и недостаточна для туннельной ионизации. Формула (26) хорошо описывает зависимость критического радиуса  $R_0$  (и совпадающей с ним критической ширины  $L_0$  для массива плоских стримеров) от  $E_0$ , полученную при моделировании (см. Рис. 3).

Еще одна особенность гофрированных волн ионизации была обнаружена, но не объяснена в работе [8]. Она состоит в том, что напряженность поля за фронтом стремится к нулю (в отличие от изолированных стримеров [11, 34]), но затухает намного медленнее, чем за фронтом плоских волн. Типичный пример такого различия приведен на Рис. 12. Парадоксальность этого эффекта состоит в следующем. В случае стационарной плоской ВУИ, как нетрудно убедиться, напряженность поля затухает по закону  $\exp(\lambda^- x)$  при<sup>6</sup>

$$\lambda^- = \frac{u_f}{2D} \left( \sqrt{1 + 4\sigma^- v_s \frac{\tilde{\alpha}\tilde{E}D}{E_s u_f^2}} - 1 \right) \quad (28)$$

в точном согласии с результатами моделирования (см. Рис. 12). Расчет по этой формуле для гофрированной волны всегда дает существенно большее (в случае, соответствующем Рис. 12, почти в 4 раза) значение  $\lambda^-$ , а результаты моделирования - значительно (примерно в 10 раз) меньшее.

Причиной этого расхождения является кривизна фронта. В стационарной полосковой волне ток проводимости точно скомпенсирован током смещения, так что плотность полного тока везде равна нулю<sup>7</sup>. В гофрированной волне ситуация совершенно иная. Вблизи оси  $x$  перед фронтом направление токов проводимости и смещения совпадают между собой и с направлением распространения волны, а вблизи поверхности  $y = R$  преобладает ток смещения (так как концентрация  $\sigma$  очень мала), направленный в противоположную сторону. В результате на фронте образуется движущийся вместе с ним вихрь тока, пример которого изображен на Рис. 13. Вблизи поверхности  $y = R$  напряженность поля, а вместе с ней и ток смещения, затухают по экспоненте (18)

<sup>6</sup>Эта формула является биполярным аналогом формулы (5.63) из работы [23].

<sup>7</sup>Если поле перед фронтом стационарной плоской волны неоднородно (как в  $p^+ - n - n^+$ -переходе), то плотность полного тока не равна нулю, но везде одинакова [44] и за фронтом напряженность поля стремится к конечной величине по экспоненте с показателем  $\lambda^-$ , тоже определяемым формулой (28).

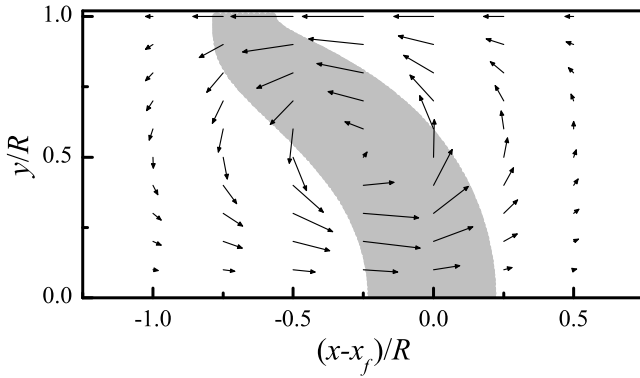


Рис. 13: Векторное поле тока вблизи фронта гофрированной волны ударной ионизации при  $R = 100\tilde{a}$  и  $E_0 = 0.36\tilde{E}$ . Длина стрелок пропорциональна  $yJ$ , где  $\mathbf{J}$  - сумма плотностей тока проводимости и смещения. Серым цветом закрашена область, внутри которой плотность объемного заряда больше  $0.002\varepsilon_0\tilde{E} \approx 3,2$  мКл/см<sup>3</sup>.

с показателем  $\lambda_E$ . Очевидно, что так же уменьшается и ток проводимости вблизи оси  $x$ , протекание которого обеспечивает возникновение омического поля за фронтом. Ясно, что и оно должно уменьшаться примерно по экспоненте с инкрементом  $\lambda_- \sim \lambda_E$ . Этот вывод подтверждается результатами моделирования, приведенными на Рис. 10.

В заключение этого раздела отметим еще два обстоятельства. Во-первых, при заданных  $E_0$  и  $R$  стационарная гофрированная волна ионизации является аттрактором для широкого набора начальных условий: по прошествии достаточного времени одно и то же решение получается

- при точечном начальном возмущении,
- эллипсоидальном начальном возмущении с поперечной полуосью порядка  $R/2$ ,
- в результате перестройки стационарной гофрированной волны с параметрами  $\{F'_0, R\}$  после изменения  $F'_0$  на  $F_0$ ,
- в результате развития нарастания малого поперечного возмущения фронта плоской волны ионизации, если  $R < \pi/k_M$ , где  $k_M$  - волновое число самого быстронарастающего возмущения [16].

Аналогичный (но менее общий) результат был получен ранее для массива двумерных стримеров в газах [8].

Во-вторых, кроме описанных выше основных закономерностей эволюции взаимодействующих стримеров, были обнаружены и более тонкие эффекты. В частности, при некоторых соотношениях управляющих параметров  $E_0$  и  $R$  наблюдались небольшие квазипериодические изменения величин  $\sigma$  за фронтом и максимальной напряженности поля, а также небольшие ква-

зипериодические отклонения формы фронта от линейной зависимости (21). Возможной причиной подобных «аномалий» является использование слишком грубой сетки конечных элементов, минимальный размер которых определялся ресурсами наших компьютеров. Однако нельзя исключить и физическую реальность наблюдавшихся эффектов (см., например, [23]).

## 4 Заключение

В настоящей статье впервые изложены результаты численного моделирования эволюции двумерного периодического массива идентичных стримеров в постоянном и однородном поле. Выбор полупроводников в качестве среды, где происходит мультистримерный разряд, предопределил гораздо более сложный (по сравнению с газами в рамках «минимальной модели» [8]) характер эволюции стримеров, которая завершается по-разному в зависимости от управляющих параметров задачи - напряженности внешнего поля  $E_0$  и расстояния между стримерами  $2R$ . Для классификации различных сценариев эволюции построена диаграмма конечных состояний массива стримеров, разделяющая плоскость  $[1/E_0, R]$  на четыре качественно различные области, изображенные на Рис. 3. В областях 1 и 2 взаимодействие между стримерами приводит со временем к формированию двух типов стационарных волн ионизации с гофрированным фронтом, различающихся механизмами ионизации. Подробно описаны и объяснены на основе простых физических соображений специфические характеристики фронтов этих волн, обусловленные особенностями процессов ионизации и переноса заряда в полупроводниках. В области 3, при достаточно малых  $R$ , массив первичных лавин порождает плоскую волну ударной ионизации. В слабых внешних полях между областями 1 и 2 существует область 4, в которой стационарное распространение волны ионизации невозможно из-за развития поперечной неустойчивости. Эту неустойчивость, наблюдавшуюся ранее при моделировании изолированных стримеров, можно назвать *локальной*, поскольку ей подвержены (или не подвержены) фронты каждого из стримеров в массиве.

Однако кроме этого возможна еще и *глобальная* неустойчивость всего массива стримеров, каждый из которых локально устойчив. Действительно, в настоящей работе мы считали, что первичные лавины, порождающие массив стримеров, стартуют **одновременно** из узлов **идеальной** гексагональной решетки. Между тем малые отклонения во времени и/или в положении старта лавин приведут к возникновению «конкуренции» между стримерами неидеального массива: некоторые из окажутся в «привилегированном» поло-

жении и будут развиваться быстрее остальных. Рано или поздно такие стримеры начнут заметно уменьшать напряженность поля в своей окрестности и подавлять таким образом распространение соседей. Если расстояние  $d$  между электродами достаточно велико, то его смогут преодолеть лишь самые ранние и/или удаленные от соседей стримеры, среднее расстояние между которыми будет порядка  $3d$  (см. Приложение). Эти соображения указывают на важность проблемы глобальной неустойчивости, анализу которой будет посвящена отдельная работа.

Автор благодарен А. В. Горбатюку за обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-00474).

### Приложение. Электростатическое взаимодействие между металлическими цилиндрами с эллипсоидальными наконечниками.

Для быстрой оценки максимальной напряженности поля  $E_M$  в массиве стримеров можно представить каждый из них в виде металлического цилиндра длиной  $2l$  с радиусом  $bR$  и с наконечниками в виде эллипсоидов вращения. Для интерпретации результатов моделирования необходимо знать, как влияют параметры массива на две величины.

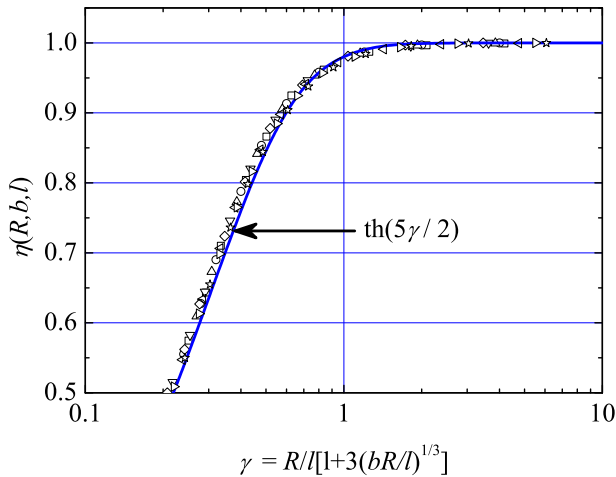


Рис. 14: Зависимость  $\eta(R, b, l)$  - отношения максимальных напряженностей поля на единичном цилиндре и на массиве цилиндров с полусферическими наконечниками - от их длины  $2l$ , радиуса  $bR$  и расстояния между ними  $2R$  при  $bR/l = 0.01 - 0.25$  и  $R/l = 0.4 - 50$ .

Первая из них - отношение  $\eta(R, b, l) \equiv E_M(R, b, l)/E_M(\infty, b, l)$  - позволяет определить условия, при которых влияния электростатического взаимодействия между стримерами на  $E_M$  становится заметным. Эти условия слабо зависят от величины продольной полуоси эллипсоидов  $a_e R$ , поэтому при расчете  $\eta$  можно для простоты положить  $a_e = b$ . Результаты таких расчетов представлены на Рис. 14. Как видно, при всех актуальных значениях отношений  $b$  и  $R/l$  они хорошо описываются функцией  $\eta = \text{th}(5\gamma/2)$ , где  $\gamma = R/l[1 + 3(bR/l)^{1/3}]$ . Взаимодействие становится существенным, когда  $\eta$  заметно отличается от 1, то есть при  $\gamma \lesssim 1$  или  $R \lesssim (2, 5 \div 3)l$ .

Вторая нужная величина - отношение  $E_M(b, a_e)/E_0$  при  $l \gg R$  - позволяет оценить  $E_M$  в установившемся режиме распространения массива стримеров (или, другими словами, стационарной гофрированной волны ионизации). В этом случае результат существенно зависит не только от  $b$ , но и от  $a_e$ . Мы использовали значение  $a_e = \pi a/2$ , так как при этом расхождение между системой «цилиндр + эллипсоид» и поверхностью вращения с образующей вида (1) минимальны и при всех  $a, b$  не превосходят 5%. Результаты таких расчетов, представленные на Рис. 15, хорошо описываются зависимостью

$$E_M(a, b) = 0.88E_0 b^{-4/5} \left(1 + \frac{4a}{5b}\right). \quad (\text{A1})$$

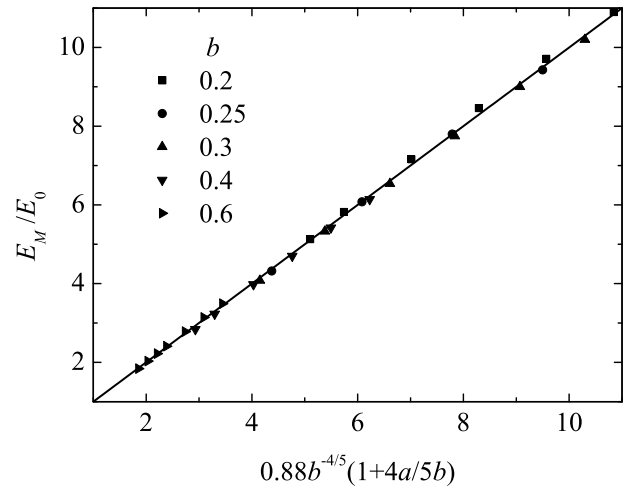


Рис. 15: Зависимость отношения  $E_M/E_0$  для массива цилиндров с эллипсоидальными наконечниками от безразмерных длин продольной  $a_e = \pi a/2$  и поперечной  $b$  полуосей при  $b = 0.2 - 0.6$  и  $a_e = 0.2 - 1.2$ .

## Список литературы

- [1] Ю. Д. Королев, Г. А. Месяц, Физика импульсного про-  
боя газов, Наука, Москва (1991).
- [2] Э. М. Базелян., Ю. П. Райзер, Искровой разряд, Изд-  
во МФТИ, Москва (1997). [E. M. Bazelyan, Yu. P. Raizer.  
*Spark Discharge*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998.]
- [3] S. Nijdam<sup>1</sup>, F. M. J. H. van de Wetering, R. Blanc,  
E. M. van Veldhuizen and U. Ebert, J. Phys. D: Appl.  
Phys. **43**, 145204 (2010).
- [4] T. M. P. Briels, E. M. van Veldhuizen, and U. Ebert, IEEE  
Trans. on Plasma Science, **36**, 906, (2008).
- [5] A. V. Krasnochub, E. I. Mintoussov, M. M. Nudnova, et  
al., Proceedings of the XXVIIth ICPIG, Eindhoven,  
the Netherlands, 18-22 July, 2005 (published online at  
<http://www.icpig2005.nl/>)
- [6] R. Ono and T. Oda, International Journal of Plasma  
Environmental Science and Technology **1**, 123 (2007).
- [7] G. V. Naidis, J. Phys. D: Appl. Phys., **29**, 779 (1996).
- [8] A. Luque, F. Brau, and U. Ebert, Phys. Rev. E **78**, 016206  
(2008).
- [9] U. Ebert, W. Van Saarloos, and C. Caroli, Phys. Rev.  
Lett., **77**, 4178 (1996); Phys. Rev. E, **55**, 1530 (1997).
- [10] F. Brau, A. Luque, B. Meulenbroek, U. Ebert, and L.  
Schäfer, Phys. Rev. E, **77**, 026219 (2008).
- [11] А. С. Кюреган, ЖЭТФ, **136**, 962 (2009).
- [12] M. Arrayas, U. Ebert, Phys. Rev. E, **69**, 036214 (2004)
- [13] M. Arrayás, M. A. Fontelos, J. L. Trueba, Phys. Rev. Lett.,  
**95**, 165001 (2005)
- [14] M. Arrayás, S. Betelu, M. A. Fontelos, J. L. Trueba, SIAM  
J. Appl. Math., **68**, 1122 (2008).
- [15] G. Derks, U. Ebert, and B. Meulenbroek, J Nonlinear Sci.,  
**18**, 551 (2008).
- [16] А. С. Кюреган, Известия РАН, сер. Энергетика, № 4, 7  
(2011).
- [17] P. G. Saffman, G. I. Taylor, Proc. R. Soc. A **245**, 312  
(1958).
- [18] P. G. Saffman, J. Fluid Mech., **173**, 73 (1986).
- [19] D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. I. Shraiman,  
C. Tang, Rev. of Modern Phys., **58**, 977 (1986).
- [20] S. J. Chapman, J. K. King, J. Eng. Math., **46**, 1 (2003).
- [21] E. D. Lozansky and O. B. Firsov, J. Phys. D **6**, 976 (1973).
- [22] Э. Д. Лозанский, О. Б. Фирсов. Теория искры. М.:  
Атомиздат, 1975.
- [23] А. Н. Лагарьков, И. М. Руткевич, Волны электрическо-  
го пробоя в ограниченной плазме. М., Наука, 1989.  
[A. N. Lagarkov, I. M. Rutkevich. *Ionization Waves in  
Electrical Breakdown in Gases*. Springer, New York, 1994.]
- [24] С. Н. Вайнштейн, Ю. В. Жилияев, М. Е. Левинштейн.  
Письма в ЖТФ, **14**, 152 (1988).
- [25] А. С. Кюреган. Письма в ЖТФ, **31**, 11 (2005).
- [26] I. V. Grekhov, Solid-State Electron. **32**, 923 (1989).
- [27] R. J. Focia, E. Schamiloghu, C. B. Fledermann et al. IEEE  
Trans. Plasma Sci. **25**, 138 (1997).
- [28] А. С. Кюреган, Письма в ЖЭТФ, **86**, 360 (2007).
- [29] А. С. Кюреган, ФТП, **42**, 23 (2008).
- [30] P. Rodin, U. Ebert, W. Hundsdorfer et al, J. Appl. Phys.,  
**92**, 958 (2002).
- [31] P. Rodin, I. Grekhov, Appl. Phys. Lett., **86**, 243504  
(2005).
- [32] P. Rodin, A. Rodina, I. Grekhov, J. Appl. Phys., **98**,  
094506 (2005).
- [33] И. В. Грехов, П. Б. Родин, Письма в ЖТФ, **37**, 17  
(2011).
- [34] А. С. Кюреган, ЖЭТФ, **138**, 721 (2010).
- [35] А. С. Кюреган, ФТП, **47**, 970 (2013).
- [36] C. Li, U. Ebert, W. J. M. Brok et al., J. Phys. D: Appl.  
Phys., **41**, 032005 (2008).
- [37] A. S. Kyuregyan, Phys. Rev. Lett., **101**, 174505 (2008).
- [38] V. V. Bychkov, S. M. Golberg, M. A. Liberman,  
L. E. Eriksson, Phys. Rev. E, **54**, 3713 (1996).
- [39] Г. Корслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел.  
М., Наука, 1964. [H. S. Carslaw, J. C. Jaeger. *Conduction  
of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford, 1994.]
- [40] M. Arrayas, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, Phys. Rev.  
Lett. **88**, 174502 (2002).
- [41] A. Rocco, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, Phys. Rev. E,  
**66**, 035102(R) (2002).
- [42] C. Montijn, U. Ebert, and W. Hundsdorfer, Phys. Rev. E,  
**73**, 065401(R) (2006).
- [43] А. С. Кюреган, ФТП, **44**, 1310 (2010).
- [44] А. С. Кюреган, ФТП, **41**, 761 (2007).